МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЧЕЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
___________ Н.У. Ярычев
«25» марта 2021г.

Программа вступительных экзаменов в магистратуру по направлению 01.04.01 «Математика», профиль подготовки «Дифференциальные уравнения»

Программа одобрена на заседании кафедры дифференциальных уравнений
Протокол №1 от «11» сентября 2020г.
И.о. заведующего кафедрой ________ Гишларкаев В.И.
Разработчик программы ______ Гишларкаев В.И.

Сдающий вступительные испытания должен:

знать:

- Общие принципы классификации уравнений в частных производных (УрЧП), основные классы УрЧП и постановки основных краевых задач для них, условия существования и единственности их решений, свойства решений; характеристическая и свободная поверхности, распространение особенностей; математические модели реальных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями; основы теории обобщенных функций, пространства Соболева, теоремы вложения и о следах; фундаментальные решения некоторых классических дифференциальных операторов; формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгоффа решения задачи Коши для волнового уравнения, аналогичные формулы для уравнения теплопроводности, функция Грина для задачи Дирихле; свойства гармонических функций.
- Уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Риккати; методы понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений; фундаментальная система решений, вронскиан, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных; устойчивость по Ляпунову, функция Ляпунова, фазовые траектории, фокус, седло, узел, предельный цикл; функция Грина, задача Штурма-Лиувилля.
- Свойства непрерывных отображений топологических пространств, компакты; основные понятия метрических, нормированных, гильбертовых пространств; производная по вектору, 1-я вариация, производная по Фреше; представление линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве; элементы теории ортогональных систем и рядов Фурье; основные классы множеств, используемые в теории меры; продолжение меры, теорема Каратеодори, способы задания мер на $(R^n, \mathrm{B}(R^n))$, измеримые функции, интеграл Лебега, пространства $L_p(X,\mu)$: основные неравенства, сопряженные пространства, свертка и усреднение, теоремы вложения и компактности.
- Принципы доказательства существования: компактности (Вейерштрасс-Лебег-Бэр), разреженности(Бэр), сжимающих отображений (Банах), принцип Брауэра, принцип Минти-Браудера, принцип Цорна.
- Формула Тейлора для функций многих переменных; теоремы о неявной функции, об обратной функции; функциональная

(не)зависимость функций, равномерная сходимость и основные операции над семействами функций; функциональные ряды, R-, C-дифференцируемость, условия Коши-Римана, аналитические функции и их свойства, теорема Коши и ее обобщения, вычеты, ряд Лорана; интеграл Римана и критерий Лебега его существования, криволинейные и поверхностные интегралы, формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса; элементы векторного анализа и теории поля; криволинейные координаты на поверхности, квадратичные формы поверхности; интегралы (в том числе несобственные кратные), зависящие от параметра; метод множителей Лагранжа

- Линейные отображения и матрицы, ранг, инварианты линейных отображений (детерминант, след), прямые суммы пространств и отображений, структура линейного отображения, жорданова нормальная форма, собственные векторы и спектр линейного оператора, скалярные произведения, матрица Грама; полилинейные операторы, k-формы; основные алгебраические структуры.

уметь:

- строить простейшие модели реальных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, определять тип уравнений, вычислять характеристики уравнений и применять их при решении (и анализе) краевых задач, решать краевые задачи при помощи преобразования Фурье, методом разделения переменных, методом характеристик; выводить энергетические неравенства и с помощью них доказывать единственность решений краевых задач; решать дифференциальные уравнения в классах обобщенных функций, вычислять фундаментальные решения, решать задачу Коши для УрЧП с помощью фундаментальных решений; ставить краевые задачи в классах обобщенных функций, доказывая соответствующие теоремы о следах и вложения; решать задачу Дирихле с помощью функций Грина, решать задачу Коши для линейных и квазилинейных УрЧП 1-го порядка.
- Решать оду с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах и приводящиеся к ним, линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, а также, используя теорему Лиувилля-Остроградского, с переменными коэффициентами; анализировать на существование и единственность задачу Коши для оду, искать аналитические решения з.Коши, находить производные от решения по начальным данным и параметрам; рисовать фазовые портреты автономных систем, решать

краевые задачи для оду с помощью функции Грина; находить полную систему первых интегралов системы оду; решать простейшие интегральные уравнения.

- Разлагать функцию в ряды Тейлора, Лорана, Фурье; находить преобразование Фурье, Лапласа функции; разлагать целые функции в бесконечные произведения, вычислять интегралы с помощью вычетов; находить экстремумы функций (безусловный и с заданными условиями), решать простейшую задачу вариационного исчисления, изопериметрическую задачу; вычислять длины, площади и объемы, определять кривизну линии, главные кривизны поверхности; определять тип кривой и поверхности 2-го порядка; пользоваться специальными функциями; пользоваться различными приемами нахождения сумм, интегралов; вычислять вероятности событий, числовые характеристики случайных величин; векторное, смешанное произведение векторов; вычислять собственные значения и векторы линейных операторов, приводить матрицу к жордановой форме, приводить квадратичную форму к главным осям, разлагать многочлены на неприводимые множители.

Критерии оценивания

Минимальный проходной балл по дисциплине математика – 61 баллов.

1. Непрерывность функции одной переменной, свойства непрерывных функций.
2. Функции многих переменных. Дифференцируемость. Достаточные условия дифференцируемости.
3. Интеграл Римана. Критерий интегрируемости функции по Риману. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
5. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

6. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.
7. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций.
9. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
10. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
11. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода, формула Грина.
12. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода, формула Гаусса-Остроградского и Стокса.
13. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
14. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
15. Линейные преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.

16. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.
17. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.
18. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка.
19. Теорема существования и единственности решения задачи коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о продолжении решения. Случай линейных систем.
20. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Системы в вариациях.
21. Линейные системы. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных.
22. Экспонента линейного оператора. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Уравнения с квазимногочленом в правой части.
23. Автономные системы. Три типа фазовых траекторий. Особые точки линейных систем на плоскости.
24. Теорема о выпрямлении векторного поля. Первые интегралы. Теорема о существовании полной системы первых интегралов.
25. Квазилинейные уравнения с частными производными 1-го порядка: общее решение, задача Коши.
26. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Фундаментальные решения операторов с постоянными коэффициентами.
27. Задача Коши для волнового уравнения: энергетическое неравенство, единственность решения.

28. Фундаментальное решение волнового оператора в случаях, когда пространственная переменная имеет размерность 1, 2, 3. Формулы Киркгоха и Пуассона. Качественное исследование.
29. Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Задача Коши для уравнения теплопроводности, Формула Пуассона, принцип максимума. Краевые задачи, принцип максимума, единственность решений.
30. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Функция Грина для задачи Дирихле и ее свойства. Решение задачи Дирихле для шара.
31. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.
32. Абстрактная схема метода разделения переменных (метод Фурье). Обоснование для различных краевых задач для 1-мерного волнового уравнения.
33. Условный экстремум функций многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа.
34. Необходимые условия экстремума в простейшей задаче классического вариационного исчисления, задаче Больца.
35. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Принцип сходимости Коши. Критерий непрерывности функций.
36. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега. Свойства.
37. Гильбертовы пространства. Изоморфизм ℓ^2. Теорема Рисса о линейном функционале.
38. Ортогональные системы. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы в пространстве непрерывных периодических функций.

Литература

1. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов Уравнения математической физики-М.;физ-мат литература,2011

2. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными, 2009
3. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики-М.,МЦНМО, 2010
4. Агранович М.С. Обобщенные функции-М., Изд.МЦНМО, 2008
5. А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уранениям в частных производных. -М.;Научный Мир,2008.
6. Кострикин А.И., Введение в алгебру, ч. I - III, М., МАИК НАУКА, 2008
7. Оптимальное управление под ред. Н.П.Осмоловского и В.М.Тихомирова .М.: издательство МЦНМО,2008.